ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

2 Специальная теория относительности

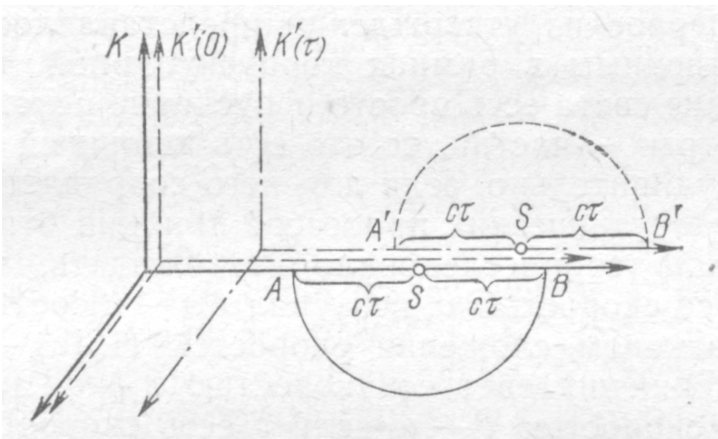
2.1 Принцип относительности и принцип постоянства скорости света

Классическая механика основывалась по существу на двух фундаментальных физических допущениях: принималось, что

1. справедлив принцип относительности, т. е. все инерциальные системы отсчета равноправны (*это утверждение часто формулируют в виде «принципа невозможности» — никакими механическими опытами нельзя установить выделенное положение какой-либо одной инерциальной системы отсчета относительно всех остальных; такие принципы невозможности удобны для формулировки фундаментальных физических положений — формулировка закона сохранения энергии в форме принципа невозможности построения вечного двигателя первого рода*);

2. состояние системы — следовательно, в частности, и силы, действующие на некоторую частицу, — в какой-либо момент времени определяется полностью координатами и скоростями всех частиц системы в тот же момент времени — т. е. принималось представление о мгновенности распространения взаимодействий.

При переходе от чисто механических явлений к области оптики и электродинамики выяснилось, что в природе существует процесс — распространение света или электромагнитных волн — обладающий парадоксальными свойствами. Именно, с одной стороны, для явлений, включающих этот процесс, ***принцип относительности сохраняется***, *т. е. оптические или электромагнитные эффекты также не позволяют преимущественно выделить какую-либо частную инерциальную систему отсчета*; но в то же время ***скорость света не зависит от движения источника*** *под этим имеется в виду, что в некоторой покоящейся инерциальной системе отсчета K скорость света, испускаемого движущимся в этой системе источником S', та же, что и для испускаемого покоящимся (в K) источником S.*



Мы видим, таким образом, что утверждения (1) и (2) кажутся противоречащими друг другу. Противоречие это не связано с рассматривавшимися конкретными механизмами распространения света. В самом деле, рассмотрим две системы отсчета, «неподвижную» систему K и движущуюся относительно нее систему K', и пусть в момент времени $t = 0$ начала отсчета этих двух систем совпадают. Тогда спустя некоторое время τ эти две системы сдвинутся относительно друг друга. Пусть теперь в момент времени $t = 0$ в точке с координатами $x = x'$ источник S (в силу утверждения (2) состояние его движения для нас безразлично!) испускает световой сигнал. К моменту τ этот сигнал достигнет в системе K точек A и B с координатами $x - c\tau$ и $x + c\tau$. Однако в силу утверждения (1) этот сигнал должен достигнуть в тот же момент в системе K' точек A' и B' с координатами $x - c\tau$ и $x + c\tau$. Поскольку система K' движется относительно K, то в момент τ A' ***не будет*** совпадать с A, а B' — с B. Но световой сигнал приходит в момент τ в какие-то ***определенные*** точки вне зависимости от того, в какой системе отсчета мы описываем его распространение — т. е. мы приходим к противоречию.

Научный подвиг Эйнштейна состоял в том, чтобы пойти в разрешении образовавшегося парадокса по самому простому пути — коль скоро оба утверждения (1) и (2) суть прямые обобщения опытных фактов, то они не могут находиться в логическом противоречии друг с другом. Поэтому оба эти утверждения следует постулировать как основные физические принципы — **принцип относительности** (1) и **принцип постоянства скорости света** (2). Источник же только что проиллюстрированного противоречия следует искать не в неверности одного из этих принципов, а в некритическом использовании представлений, основанных на обычном «здравом смысле».

Если пересмотреть проведенное рассуждение с такой точки зрения, то можно заметить, что мы неявно допустили в нем, что время *течет* в движущихся друг относительно друга системах отсчета K и K' одинаковым образом, т. е. **допустили абсолютность времени** (3). Таким образом в логическом противоречии оказываются не два утверждения (1) и (2), а три — (1), (2) и (3). Одно из них должно быть неверным, и поскольку только третье, как показал проведенный Эйнштейном анализ, не имело на самом деле никакого опытного подтверждения, то именно им и приходится пожертвовать.

Таким образом за логическую совместность принципов относительности и постоянства скорости света приходится расплачиваться отказом от «очевидного» представления об абсолютности времени, приходится принимать, что каждой инерциальной системе отсчета K' соответствуют не только *свои* координаты x', y', z', но и *свое время* t'. В дальнейшем построении вытекающей из принципов (1) и (2) теории — такая теория называется **специальной теорией относительности** — мы не будем точно следовать оригинальным рассуждениям Эйнштейна, но в целях упрощения изложения сразу воспользуемся предложенной Минковским в 1908 году геометрической интерпретацией.

Основным понятием этой интерпретации является понятие **события**, которое характеризуется местом, *где* и временем, *когда* оно происходит. Это место и время может быть указано только по отношению к некоторой системе отсчета K — в ней событие характеризуется четверкой чисел (**координат события**) $\{t, x, y, z\} = \{t, \vec{r}\}$. Таким образом в каждой системе отсчета координаты событий образуют некоторое четырехмерное многообразие. В другой системе K' координаты событий $\{t', x', y', z'\} = \{t', \vec{r'}\}$ образуют другое четырехмерное многообразие. Чтобы установить связь между 4-многообразиями, изображающими события в двух системах отсчета, обратимся к основным принципам (1) и (2).

Рассмотрим два события: S_1 — состоящее в испускании светового сигнала в некотором месте в некоторый момент, и S_2 — состоящее в регистрации того же сигнала в другой момент в другом месте. В системе отсчета K координатами S_i будут $\{t_i, x_i, y_i, z_i\}$, в системе отсчета K' — $\{t'_i, x'_i, y'_i, z'_i\}$. В силу (1) и (2) распространение света в обеих системах происходит с одной и той же скоростью c, т. е.

$$c(t_2 - t_1) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad c(t'_2 - t'_1) = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}.$$

причем можно утверждать, что из выполнения одного из этих равенств должно следовать выполнение другого.

Высказанное утверждение можно сформулировать в красивой геометрической форме, если соотнести *каждой* паре координат событий — число s, называемое **интервалом**, по формуле

$$-s_{21}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2. \tag{19}$$

Тогда то обстоятельство, что события S_1 и S_2 могут состоять в испускании и регистрации одного и того же светового сигнала, можно записать в *любой* системе отсчета в форме требования:

$$s_{21} = 0, \quad s'_{21} = 0.$$

Итак, в силу принципов (1) и (2) факт обращения интервала между двумя событиями в нуль *не зависит от системы отсчета*, это обстоятельство характеризуют словами, что нулевые интервалы — инварианты.

Но удобнее рассматривать интервал между двумя бесконечно близкими событиями

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Для таких интервалов, конечно, тоже сохраняется выражающее принципы (1) и (2) основное свойство, что из обращения интервала между двумя событиями в нуль в одной системе отсчета следует его обращение в нуль в другой и наоборот, что приводит нас к значительно более сильному утверждению $ds^2 = ds'^2$ об инвариантности не только нулевых, но и произвольных бесконечно-малых интервалов.

Итак, основные физические принципы (1) и (2) позволяют установить в многообразии координат событий квадратичную форму (19), значение которой *не зависит* от выбора системы отсчета. Пользуясь этим можно ввести в многообразии событий **метрику**, полагая «квадрат расстояния» между событиями равным значению формы (19), и превратить тем самым многообразие событий в пространство, точками которого эти события являются.

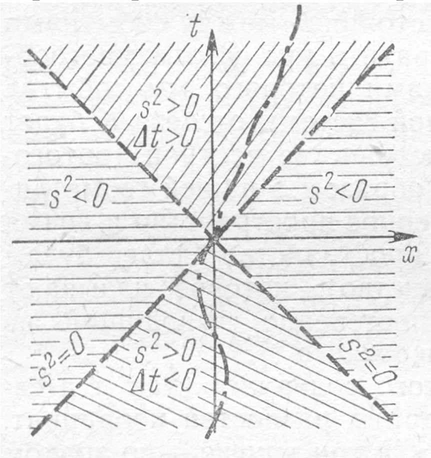
Таким образом в нашей геометрической интерпретации обычное трехмерное пространство и время объединяются в одно четырехмерное пространство (далее будем говорить для краткости 4–пространство), которое называют **пространством Минковского** или **миром Минковского** (в соответствии с последним термином, события, являющиеся точками мира Минковского, называют **мировыми точками** или 4-точками), а линии в этом пространстве — **мировыми линиями**.).

Метрика (19) мира Минковского содержит (как и в евклидовом пространстве) только квадраты разностей координат, но один из них входит со знаком «+», а три другие — со знаком «-»; такое пространство принято называть **псевдоевклидовым** (точнее, псевдоевклидовым с сигнатурой (+,-,-,-,). Благодаря индефинитности метрики псевдоевклидова пространства его геометрия в некотором смысле богаче содержанием, чем евклидова. В то время как пары точек евклидова пространства могут качественно находиться (если они не совпадают) только в одном соотношении друг с другом, квадрат псевдоевклидова «расстояния»

$$s^2 = c^2(\triangle t)^2 - (\triangle l)^2, \quad (\triangle l)^2 = (\triangle x)^2 + (\triangle y)^2 + (\triangle z)^2,$$

может быть как положительным, так и отрицательным или (для несовпадающих точек!) равным нулю. В соответствии с этим возникают три качественно разные возможности взаимного расположения двух мировых точек — если квадрат разделяющего их интервала: $s^2 > 0$, то интервал называют **времени-подобным**; $s^2 = 0$ — **свето-подобным**; $s^2 < 0$ — **пространственно-подобным**. Те же термины употребляют и по отношению к самой паре: говорят «точка A пространственно-подобна точке B» и т. п.

Если фиксировать одну из точек пары, — скажем принять ее за начало отсчета некоторой системы координат, — то все остальные мировые точки разобьются в смысле этого отношения на три класса, т. е. все 4-пространство разобьется на три области. Поскольку условие $s^2 = 0$ — есть уравнение, то размерность области, занятой точками, свето-подобными началу координат, будучи на единицу меньше размерности пространства, будет образовывать в нем 3-мерную (на чертеже — одномерную) гиперповерхность. Эта гиперповерхность называется **световым конусом** (на чертеже виден только след, образовавшийся при сечении светового конуса плоскостью $y = z = 0$: две прямые $x = \pm ct$). Световой конус служит границей областей, пространственно-подобных и времени-подобных началу координат. На чертеже каждая из этих областей выглядит в свою очередь разбитой на две несвязные подобласти; однако в реальном 4-случае, как легко сообразить, пространственно–подобная область связна (хотя и не односвязна); времени же подобная область действительно распадается на две несвязные подобласти соответственно знаку разности временной координаты. Таким образом фактически все 4-пространство разбивается даже не на три, а на четыре различные области.



С обычной трехмерной точки зрения выбор системы 4-координат — это выбор некоторой инерциальной системы отсчета, а инерциальная система отсчета фиксируется заданием каких–либо материальных тел (или материального тела), которые принимаются в этой системе за неподвижные. Но материальное тело занимает в каждый момент времени некоторое определенное положение в пространстве; поэтому оно представляется в геометрической интерпретации Минковского непрерывной цепочкой событий — мировой линией.

В частности, материальное тело, олицетворяющее начало координат обычного 3-пространства в выбранной системе отсчета, есть совокупность событий, образующих в 4-пространстве прямую линию — ось времени системы координат в 4-мире.

Интервал между любой парой принадлежащих этой линии событий, поскольку для них $\triangle l = 0$, всегда времени-подобен $\triangle s^2 > 0$. Это свойство означает, что мировая линия, изображающая материальную частицу, **всюду времени-подобна**, т. е. любая пара ее точек разделена времени-подобным интервалом.

Итак, пары событий, разделенных времени-подобными интервалами, могут физически соответствовать двум разным моментам «жизни» одной и той же материальной частицы или — выражаясь более абстрактно — лежать на оси времени некоторой (инерциальной) системы отсчета — этим и объясняется принятый в их отношении термин (отсюда мы видим, что материальное тело в теории относительности не может ни в какой системе отсчета двигаться со скоростью, большей скорости света). В самом деле, если некоторое материальное тело двигалось бы со скоростью, большей , то оно изображалось бы на нашем графике мировой линией, лежащей *вне* светового конуса; пары событий на такой линии были бы разделены (в системе K) *пространственно-подобными* интервалами. Однако с этим телом можно было бы, как и с каждым материальным телом, связать систему отсчета K', в которой оно покоится, — в ней та же мировая линия была бы осью времени, т.е. интервалы между лежащими на ней событиями были бы *времени-подобны.* Таким образом знак интервала зависел бы от системы отсчета, что в силу инвариантности интервала невозможно.

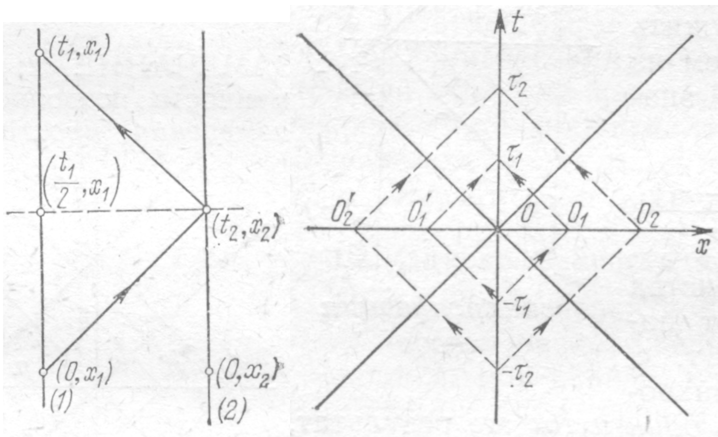
Физический смысл *свето-подобного* расположения двух событий — это события, которые могут быть связаны световым сигналом, а световой конус есть просто геометрическое место траекторий таких сигналов, испускаемых из одной 4-точки (или принимаемых в ней).

2.2 Одновременность и пространство

С четырехмерной точки зрения под пространством (в некоторый момент времени) естественно понимать совокупность всех одновременных друг другу событий. Таким образом пространство оказывается определяемым через понятие **одновременности**. Однако как раз с понятием одновременности в теории относительности дело обстоит совсем не просто — мы уже видели, что два основных принципа несовместны с интуитивным представлением о независимости одновременности от выбора системы отсчета.

Поэтому будем рассуждать в рамках некоторой фиксированной инерциальной системы отсчета K и допустим, что одновременность событий, происходящих в ней в разных местах, как-то установлена, т. е. что мы каким-то способом (неизвестно - хорошим или плохим) умеем синхронизировать часы, покоящиеся в разных точках, скажем в точках x_1 и x_2. На рисунке изображены мировые линии (1) и (2) этих часов и «одновременные» события $(0, x_1)$ и $(0, x_2)$.

Произведем теперь два (мысленных) опыта. Во-первых, испустим в пространственной точке x_1 в момент времени 0 (событие $(0, x_1)$) световой сигнал и зарегистрируем его приход в пространственную точку x_2 в момент t_2 (событие (t_2, x_2)). Во-вторых, одновременно с регистрацией сигнала направим из точки x_2 (то же событие (t_2, x_2)) ответный сигнал в точку x_1. Пусть его прибытие в x_1, будет зарегистрировано в момент t_1 (событие (t_1, x_1)). Каждый из этих опытов может служить для определения скорости света, причем из первого опыта мы получим для нее значение $\dfrac{|x_2 - x_1|}{t_2}$ а из $\dfrac{|x_2 - x_1|}{t_1 - t_2}$. Однако из-за изотропии пространства скорость света не может зависеть от направления распространения сигнала, т. е. оба опыта должны (при *правильной* синхронизации часов в разных местах!) дать *один и тот же* результат, т. е. должно быть $t_1 - t_2 = t_2$. Иными словами, событием в пространственной точке x_1, одновременным событию (t_2, x_2), должно быть событие $(t_1/2, x_1)$.



синхронизация часов *определение одновременности*

Рассмотренные мысленные опыты позволяют теперь сформулировать определение **одновременности**: назовем событие Θ' **одновременным** событию Θ, имеющему координаты $t = 0$, $x = 0$, если световой сигнал, испущенный в момент $t = -\tau$ по часам, покоящимся (в системе K) в пространственной точке $x = 0$, вернется после отражения (событие Θ') в то же место $x = 0$ в момент $t = +\tau$ по тем же часам. На рисунке изображены две пары таких одновременных ΘО событий Θ_1, Θ'_1 и Θ_2, Θ'_2, отличающиеся направлением испущенного сигнала (внутри пары) и временем распространения сигнала 2τ.

Поэтому можно дать дальнейшее определение: для всех τ и всех направлений распространения события Θ' образуют в совокупности гиперплоскость $t = 0$, называемую **пространством** в момент $t = 0$. Пространство не будет зависеть от того, относительно какой его точки его начали строить.

Поскольку принцип причинности требует чтобы причина всегда предшествовала бы следствию во времени, то причинно-следственные соотношения могут связывать лишь пары событий, интервал между которыми времени-подобен. Но о всякой паре событий A и B, связанных соотношениями причины–следствия, всегда можно сказать, что из 4-точки A посылался сигнал, принятый в 4-точке B. Такими образом, оказывается, что в теории относительности любой сигнал из некоторой 4-точки A может быть послан лишь в 4-точки, отделенные от A времени-подобным интервалом. Но этому всегда будет соответствовать скорость распространения сигнала, *меньшая скорости света* c (или, в крайнем случае свето-подобного интервала, *равная* ей). Таким образом выясняется, что в теории относительности скорость света **есть максимально возможная скорость сигнала или максимально возможная скорость распространения взаимодействий** (*скорости, не могущие служить для передачи сигнала, не ограничены этим пределом, так, если поворачивать источник направленного светового пучка, то на достаточно удаленном «экране» «образуемый этим пучком «зайчик» может двигаться сколь угодно быстро*). Итак, механика теории относительности отличается от классической механики тем, что в ней существует **максимальная скорость распространения взаимодействий**.

2.3 Замедление времени

Рассмотрим теперь материальное тело, движущееся по отношению к некоторой инерциальной системе отсчета K произвольным образом (не обязательно равномерно и прямолинейно). Время τ, измеренное с помощью атомных часов, постоянно связанных с телом, называют **собственным временем** для данного материального тела.

Определим дифференциал собственного времени йт. Атомные часы измеряют (разделенный на c) интервал. Следовательно,

$$d\tau = \frac{1}{c}ds = \frac{1}{c}\sqrt{c^2dt^2 - dl^2} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

где $v(t)$ — скорость материального тела в системе K в момент t. Конечный промежуток собственного времени получается отсюда интегрированием

$$\triangle\tau = \tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}.$$

Поскольку $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \leqslant 1$, то $\triangle\tau$ всегда $\leqslant \triangle t$, т. е.: собственное время всегда течет *не быстрее*, чем координатное время в какой-либо системе отсчета. Этот эффект носит название эйнштейновского **замедления времени**.

2.4 Преобразования Лоренца

В геометрической интерпретации Минковского переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой соответствует преобразование координат в псевдоевклидовом 4-пространстве, оставляющее инвариантным «расстояние»:

$$-s^2 = (\triangle x)^2 + (\triangle y)^2 + (\triangle z)^2 - c^2(\triangle t)^2 = (\triangle x')^2 + (\triangle y')^2 + (\triangle z')^2 - c^2(\triangle t')^2.$$

Найдем явный явный вид этих преобразований.

Будем для сокращения обозначать пространственные координаты x, y, z одной буквой x с индексами 1,2,3, соответственно, а вместо времени t введем четвертую *чисто мнимую* координату $x_4 = ict$, так что выражение для интервала примет формально евклидов

$$-s^2 = (\triangle x_1)^2 + (\triangle x_2)^2 + (\triangle x_3)^2 + (\triangle x_4)^2. \tag{20}$$

Тогда линейные преобразования, оставляющие инвариантным (20) и затрагивающие только координаты $x_1 = x$ и $x_4 = ict$, запишутся ψ — параметр поворота

$$x_1 = \cos\psi x_1' - \sin\psi x_4', \quad x_4 = \sin\psi x_1' + \cos\psi x_4'.$$

Чтобы выяснить его физический смысл, будем считать, что рассматриваемый поворот соответствует переходу от некоторой инерциальной системы отсчета K к другой инерциальной системе K', движущейся относительно K вдоль оси x с (постоянной!) скоростью V. Тогда движение материальной точки, имеющей в K' во все моменты «времени» x_4 постоянную координату $x_1' = 0$, должно изображаться в системе K уравнением $x = Vt$, т. е. $x_1 = \dfrac{V}{ic}x_4$. Из выписанных же формул мы получаем $\dfrac{x_1}{x_4} = -\operatorname{tg}\psi$. Следовательно, угол ψ «евклидова поворота» оказывается чисто мнимым, причем

$$\operatorname{tg}\psi = i\frac{V}{c}, \quad \cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \sin\psi = \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

В результате мы приходим к специальным преобразованиям Лоренца (голландского физика Генриха Антуана Лоренца)

$$x_1 = \frac{x_1' - i\frac{V}{c}x_4'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3', \quad x_4 = \frac{x_4' + i\frac{V}{c}x_1'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{21}$$

Переписанное через настоящее время специальное преобразование Лоренца будет выглядеть как

$$x_1 = \frac{x_1' + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x_1'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{22}$$

Если перейти в преобразовании Лоренца к случаю скоростей V, малых по сравнению со скоростью света, выполняя формальный предельный переход $c \to \infty$, то мы получим из (22)

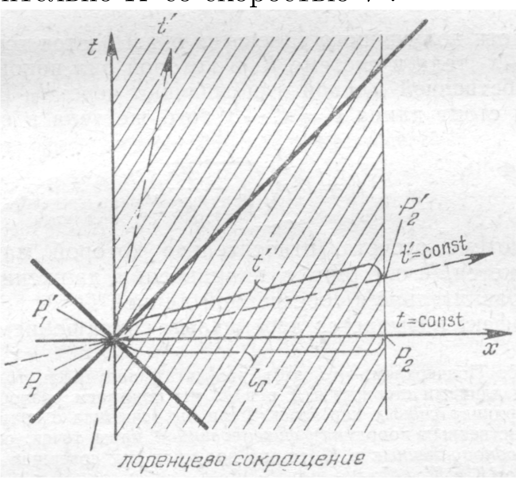
$$x_1 = x_1' + Vt, \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3', \quad t = t'$$

хорошо знакомое преобразование Галилея.

Таким образом, для кинематики теории относительности выполняется **принцип соответствия**: в той области физических явлений, в которой все скорости малы по сравнению со скоростью света, релятивистское описание совпадает с описанием классической механики. Преобразования Лоренца (22) определяют все кинематические соотношения к теории относительности. Рассмотрим два важных их применения.

2.4.1 Лоренцево сокращение

Пусть в системе K расположено некоторое неподвижное твердое тело — по историческим причинам обычно говорят о «стержне» или «масштабе», — длина которого (в направлении x) есть l_0. Какую длину припишет тому же телу наблюдатель, проводящий измерения в системе K', движущейся относительно K со скоростью V?



В мире Минковского неподвижное в K тело изобразится полосой, ограниченной мировыми линиями его концов — прямыми, параллельными оси t. Под **длиной** тела мы понимаем разность пространственных координат x *одновременных друг другу* 4-точек этих мировых линий.

Поскольку, однако, одновременность зависит от системы отсчета, то оказывается, что под длинами тела в разных системах K и K' мы понимаем разность пространственных координат *разных* пар 4-точек: на нашем чертеже это будут 4-точки P_1 и P_2 в системе K и 4-точки P_1' и P_2' в системе

K', причем пара (P_1, P_2) имеет одинаковую координату t, пара (P'_1, P'_2) — одинаковую координату t', а пары (P_1, P'_1) и (P_2, P'_2) — соответственно одинаковые координаты x: $x = x_1$ и $x = x_2$. Выразим с помощью (22) пространственные координаты 4-точек P'_1 и P'_2 в системе k через их координаты в K':

$$x_1 = \frac{x'_1 + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = \frac{x'_2 + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

и вычтем эти выражения друг из друга

$$x_1 - x_2 = \frac{x'_1 - x'_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

В левой части полученного равенства оказывается тогда как раз длина $x_2 - x_1$, тела в системе K, в которой она покоится; ее называют **собственной длиной** и обозначают через l_0. В числителе же правой стоит длина $l' = x'_1 - x'_2$ того же тела в системе K'. Итак,

$$l' = l_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \tag{23}$$

то есть — *в той системе отсчета, относительно которой материальное тело движется, его длина в направлении движения l сокращается сравнительно с собственной длиной l_0*. Этот эффект называется **лоренцевым сокращением длины** (**сокращение Фицджеральда**).

Поскольку поперечные (к направлению движения) измерения тела не затрагиваются преобразованием (22), то его объем Ω в движущейся системе сокращается по тому же закону (23):

$$\Omega = \Omega_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

2.4.2 Сложение скоростей

В качестве второго важного примера применения преобразований Лоренца выясним, с какой скоростью v будет двигаться относительно системы K материальное тело, которое движется со скоростью v' относительно системы K', в свою очередь движущейся относительно K со скоростью V. Напомним, что классические преобразования Галилея приводили к простому ответу

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \tag{24}$$

на этот вопрос; теперь такой результат явно невозможен, так как при сложении двух скоростей $\frac{c}{2} < v'$, $V < c$ он приводил бы к $v > c$.

Перепишем преобразование (22) для дифференциалов и поделим почленно первые три равенства на четвертое. Вспоминая определение скорости как производной координаты по времени, получим тогда

$$v_1 = \frac{v'_1 + V}{1 + \frac{Vv'_1}{c^2}}, \quad v_2 = \frac{v'_2\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{Vv'_1}{c^2}}, \quad v_3 = \frac{v'_3\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{Vv'_1}{c^2}}$$

Мы видим таким образом, что — в отличие от координат — при переходе к другой системе отсчета преобразуются не только составляющая v_1 скорости по оси x_1 но и составляющие v_2 и v_3, и притом различным способом. Поэтому чтобы переписать полученные формулы в векторном виде, приходится выделять у $\vec{v}$ и $\vec{v}'$ продольные (вдоль $\vec{V}$) и поперечные составляющие:

$$\vec{v_{||}} = \frac{\vec{v_{||}}' + \vec{V}}{1 + \frac{\vec{V}\vec{v}'}{c^2}}, \quad \vec{v_{\perp}} = \frac{\vec{v_{\perp}}'}{1 + \frac{\vec{V}\vec{v}'}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{\vec{V}^2}{c^2}}. \tag{25}$$

Это и есть искомый релятивистский закон сложения скоростей, заменяющий простое галилеево правило (24).

Если обе складываемые скорости $\vec{v}'$ и $\vec{V}$ параллельны друг другу, то закон (25), который можно записать тогда в скалярной форме, значительно упрощается:

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}.$$

В частности, из него видно, что если обе складываемые скорости меньше скорости света, то такой же будет и результирующая скорость v. В случае непараллельных скоростей $\vec{v}'$ и $\vec{V}$ обе эти скорости входят в (25) несимметрично. Это значит, что результат сложения двух скоростей в теории относительности зависит от порядка. Поскольку всякую скорость (меньшую c!) можно рассматривать как параметр преобразования Лоренца от одной инерциальной системы к другой, то отсюда следует, что и результат двух последовательных специальных преобразований Лоренца, выполняемых в несовпадающих плоскостях, зависит от порядка их выполнения.

2.5 Экспериментальное подтверждение следствий из преобразований Лоренца

Продолжительность жизни μ–мезонов

В 1936 г. физиком Юкава при исследовании сил ядерного взаимодействия были предсказаны частицы вещества, названные впоследствии μ–мезонами. По предположениям, они должны были быть нестабильными и иметь массу в 200 раз большую массы электрона. Через два года Андерсон и Неддермейер обнаружили эти частицы в составе космических лучей. Многочисленные опыты позволили установить их массу, она оказалась равной 206,7 электронной массы. Была определена и продолжительность их жизни τ. Но в измерении продолжительности жизни μ–мезонов возникли противоречия: время жизни μ–мезона, измеренное при движении его с большой скоростью на высоте между 1620–3250 м над уровнем моря, оказалось больше, чем время жизни, предсказанное теоретически по периоду β–распада ядер; первое τ равно $2.8 \cdot 10^{-6}$ с, второе $\tau_{\text{теор}}$ $2.15 \cdot 10^{-6}$ с. На помощь пришла специальная теория относительности. Подставляя вместо $dt = 2.8 \cdot 10^{-6}$ с., а вместо $d\tau = 2.15 \cdot 10^{-6}$ с. и учитывая скорость движения μ–мезона, получим нужное равенство. Позже были поставлены опыты по определению времени жизни медленного μ–мезона, измерения дали результат, близкий к предсказанному. Оказалось, что $\tau_{\text{теор}}$ равно времени жизни τ_0 μ–мезона, покоящегося относительно лаборатории, а измеренная над уровнем моря продолжительность жизни τ относится к μ–мезону, движущемуся относительно лаборатории. Так была подтверждена формула $\tau_0 = \tau\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}} = invariant$.

Эффект Допплера

Явление и эффект Допплера, известный в оптике и являющийся опытным фактом, прекрасно объясняется специальной теорией относительности.

$$\nu = \frac{\nu' \sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{V}{c}\cos\theta} \tag{26}$$

В полученной формуле скорость V системы K относительно системы K' следует рассматривать как скорость движения относительно друг друга источника света и оптического прибора или просто фотопластинки. Частота света ν, падающего на фотопластинку, отлична от частоты света ν', испускаемого источником; она зависит от скорости относительного движения и угла, под которым пучок света падает на фотопластинку.

При малых скоростях, когда $V \lll c$, из формулы (26) получим известный в оптике эффект Допплера $\nu' = \nu\left(1 - \dfrac{V}{c}\cos\theta\right)$, если источник света и прибор удаляются друг от друга, и $\nu' = \nu\left(1 + \dfrac{V}{c}\cos\theta\right)$, если они сближаются.

При больших скоростях из формулы (26) вытекают два существенных частных случая релятивистского эффекта Допплера.

1. Продольный эффект Допплера, который получается при $\cos\theta = 1$, когда источник и прибор сближаются:

   $$\nu = \nu' \sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}}, \quad (\nu > \nu'), \tag{27}$$

   и при $\cos\theta = -1$, когда источник и прибор удаляются друг от друга:

   $$\nu = \nu' \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}}, \quad (\nu < \nu'). \tag{28}$$

   Из релятивистского продольного эффекта (27) и (28) при малых скоростях получается классический эффект, который также является продольным $\nu \approx \nu'\left(1 + \dfrac{V}{c}\right)$.

2. Поперечный эффект Допплера получится из формулы (26) при $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, т.е. когда источник и прибор движутся мимо друг друга:

$$\nu = \nu' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Из классической формулы в этом случае получим $\nu = \nu'$, т. е. не следует поперечного эффекта.

Поперечный эффект относится к эффектам второго порядка малости по $\dfrac{V}{c}$; он мал по сравнению с продольным, относящимся к эффектам первого порядка. Для наблюдения поперечного эффекта требуется более совершенный физический эксперимент. Впервые он наблюдался в 1938 г. физиком Айвсом при исследовании излучения атомов водорода в анодных лучах.

Наблюдение эффекта Допплера подтверждает релятивистский эффект замедления времени в движущихся системах отсчета.

Опыты с эффектом Мёссбауэра

Предположим, что часы B, синхронно идущие с часами A в системе K, пришли в движение и через некоторое время возвратились в исходную точку. Имея теперь в виду, что $v = v(t)$ получим время часов B в системе K от начала до конца движения

$$\triangle t_B = \int_0^t \sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c^2}\right)^2} dt, \tag{29}$$

которое меньше, чем время покоящихся часов A. Заметим, что часы B за время движения испытали ускорение и замедление, так что здесь имеет место «парадокс часов».

В последние годы значительно повысилась точность определения времени протекания физических процессов, что позволило опытным путем проверить формулу (29), согласно которой часы, испытывающие ускорение, имеют замедленный ход и замедление времени, показанное в уравнении (29), определяется средним значением квадрата скорости за время движения, когда $v \lll c$. Опытная проверка уравнения (29) позволяет подтвердить теоретические выводы о привилегированности инерциальных систем в пространстве–времени, так как в инерциальных системах этот парадокс отсутствует. Вместе с этим опытным путем устанавливается, что неинерциальность систем отсчета может быть обнаружена не только при помощи прибора, измеряющего ускорение, но также и по характерному для данной системы ходу часов. Как показал Айве, наиболее быстро идущим часам из их множества, совершающим различные относительные движения, соответствует наименьшее среднее значение скорости в некоторой инерциальной системе. Это позволило указать новый способ определения скорости, не прибегая к определению расстояния, проходимого часами, или кинетической энергии и массы. Суть этого нового метода состоит в сопоставлении показаний времени двух часов, одни из которых покоятся, а другие движутся и проходят дважды точку, где покоятся первые. Тогда, зная время покоящихся часов $t_2 - t_1$ и время движущихся часов $t'_2 - t'_1$ пользуясь уравнением (29), можно определить v^2, которая стоит под корнем. Такие опыты стали возможными благодаря открытому эффекту Мёссбауэра.

В 1958 г. Мёссбауэр нашел способ получения γ–фотонов с энергией, равной энергии резонансного поглощения. Это получило название эффекта Мёссбауэра.

В температурном сдвиге резонансной линии в эффекте Мёссбауэра роль часов играют ядра Fe^{57}. При комнатной температуре эти ядра в кристаллической решетке имеют среднюю квадратичную скорость порядка $3 \cdot 10^2$ м/с. Фотоны, посылаемые от источника к поглотителю, несут временную информацию между ядрами. Опыт с эффектом Мёссбауэра показал, что $\triangle t$ действительно зависит от среднеквадратичной скорости.

Опыты Хейя и других физиков были поставлены для подтверждения выводов о зависимости времени от ускорения. Опыты показывают, что интенсивность γ–лучей увеличивается при увеличении ускорения, что и является следствием смещения в сторону уменьшения резонансной частоты поглотителя Fe^{57}, благодаря чему ядра поглощают γ–фотоны, возбуждаются и затем сами их испускают.

В этих опытах снова подтверждается поперечный эффект Доплера, а также влияние ускорения — парадокс часов, но зависимость частоты от ускорения значительно меньше, чем от скорости.

Аберрация звезд

Если в течение года ось телескопа ориентировать на какую–либо звезду так, чтобы она все время была в поле зрения, то на фотопластинке, куда попадает излучение звезды, останется след в виде эллипса. Это происходит потому, что ось телескопа все время изменяет направление в пространстве, смещаясь на некоторый угол от линии, соединяющей неподвижную точку на оси телескопа и звезду. А так как телескоп вместе с Землей движется вокруг Солнца по эллипсу, то объектив и окуляр телескопа описывают эллипс, который виден из неподвижной точки на оси телескопа под углом $41''$. Это явление аберрации звезд было открыто Бродлеем в XVIII в. Угол, который составляет ось телескопа с направлением на звезду, называется углом аберрации и равен $20,5''$. Аберрация звезд опровергает гипотезу «увлечения эфира», но находится в согласии со специальным принципом относительности ($\sin\alpha = \dfrac{V}{c}$, α — угол аберрации, V — скорость движения звезды.).

2.6 Импульс, масса и энергия

Импульс — это величина, закон сохранения которой сводится к правилу «смешивания» скоростей при полностью неупругом столкновении. Вычисляя скорость как отношение (координатного) пути к (координатному) времени, мы обнаружим, что масса зависит от скорости. Эта масса является компонентой импульса в направлении времени. Запишем

$$P = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left(\frac{V}{c}, 1 \right),$$

где m_0 — масса объекта в сопутствующей инерциальной системе, т. е. в системе покоя объекта. Она называется **массой покоя**. Согласно Минковскому, квадрат модуля импульса есть

$$|P|^2 = m_0^2 c^2. \tag{30}$$

В соответствии с этой конструкцией численное значение массы покоя не зависит от инерциальной системы, в которой измеряется объект, и не зависит от скорости объекта.

Разлагая временную компоненту импульса по скоростям, получим

$$mc = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = m_0 c \left(1 + \frac{V^2}{2c^2} + \ldots \right) = \frac{1}{c} \left(m_0 c^2 + \frac{m_0}{2} V^2 + \ldots \right).$$

Для малых скоростей временная компонента импульса с точностью до постоянной суммирования пропорциональна кинетической энергии объекта, так что в этом случае можно записать

$$mc^2 = m_0 c^2 + \frac{m_0}{2} V^2 = E_0 + E_{\text{кин}}.$$

Справедлива ли эта формула для больших скоростей? Если не опираться на формулу $E_{\text{кин}} = \dfrac{m}{2} V^2$, а определять кинетическую энергию как работу, которую нужно совершить над объектом, чтобы вывести его из состояния покоя (в заданной инерциальной системе) и разогнать до скорости V, то для произвольных скоростей имеет место равенство

$$E_{\text{кин}} = mc^2 - m_0 c^2. \tag{31}$$

Является ли $E_0 = m_0 c^2$ просто константой или E_0 описывает энергию, которая может превратиться в кинетическую энергию? Говоря о взаимном превращении форм энергии, мы приходим к закону сохранения энергии, который исходит из сохранения энергии при упругом столкновении. В ньютоновской механике мы наблюдаем неупругое столкновение, при котором кинетическая энергия соударяющихся тел уменьшается. По мы можем установить механический эквивалент теплоты, т. е. сказать, что чисто кинетическая энергия превращается в тепловую, т. е. обобщенную внутреннюю энергию. Но закон сохранения для четвертой компоненты импульса, который содержится в правиле смешивания скоростей, означает, что *Сумма кинетических энергий + Сумма членов* $E_0 = const$. Поэтому член E_0 должен содержать внутреннюю энергию объекта; E_0 называется **энергией покоя**.

Согласно выражению (30), частицы, движущиеся со скоростью света, имеют нулевую массу покоя. Такими частицами являются кванты электромагнитного поля - фотоны, которые ради более наглядного представления эйнштейновской кинематики могут пониматься и как волновые пакеты света. Для них справедливо соотношение *Модуль p пространственной компоненты импульса = временной компоненте импульса.* Экспериментально обнаруживается, что энергия этих частиц пропорциональна импульсу и что для них выполняется равенство $E = p \cdot c$. Для этих же частиц временная компонента пропорциональна полной энергии, которая в данном случае является чисто кинетической. Таким образом, мы имеем право написать, что полная энергия равна

$$E = mc^2 \tag{32}$$

Подтверждением того, что полная энергия частиц действительно может перейти в кинетическую энергию, служат реакции столкновения элементарных частиц, в результате которых образуются только частицы с нулевой массой покоя, т. е. частицы, движущиеся со скоростью света.

Формула (31) выражает зависимость инертной массы от скорости

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Формула (32) — выдающийся результат частной теории относительности. Она означает, что закон сохранения энергии является частью закона сохранения импульса и содержится в правиле смешивания скоростей. В ньютоновской механике это не так. Там массы не изменяются, и, естественно, не выполняется закон сохранения механической энергии: механическая энергия при неупругих ударах теряется, и необходимы дополнительные теоретические построения, чтобы можно было сохранить сам закон сохранения для неупругих столкновений. В частной теории относительности закон сохранения инертной массы идентичен закону сохранения энергии. Каждый вид энергии имеет инертную массу, и коэффициент пропорциональности равен c^2. Укажем еще раз на различие между инертной массой и массой покоя. Инертная масса является множителем между импульсом и координатной скоростью V; напротив, масса покоя является инертной массой только в сопутствующей инерциальной системе. Таким образом, масса покоя не зависит от инерциальной системы и от скорости объекта в ней, а инертная масса зависит от скорости. Частица, движущаяся со скоростью света, не имеет массы покоя. Нет такой инерциальной системы, в которой эта частица покоилась бы. Свойство двигаться со скоростью света не зависит от инерциальной системы. Это предположение лежит в основе частнорелятивистской кинематики. Однако такая частица обладает инертной массой, которая соответствует присущей этой частице энергии.

Формула (32) отнюдь не означает, что энергия может превращаться в массу и наоборот. Полная энергия и полная масса всегда сохраняются. Превращаться друг в друга могут энергия покоя (и, следовательно, масса покоя) и кинетическая энергия.

3 Электродинамика

3.1 Векторный анализ

Векторный анализ — раздел математики, распространяющий методы математического анализа на векторы в двух или более измерениях. Объектами приложения векторного анализа являются:

1. векторные поля — отображения одного векторного пространства в другое;
2. скалярные поля — функции на векторном пространстве.

Наибольшее применение векторный анализ находит в физике и инженерии. Основные преимущества векторных методов перед традиционными координатными:

1. *Компактность*. Одно векторное уравнение объединяет несколько координатных, и его исследование чаще всего можно проводить непосредственно, не заменяя векторы на их координатную запись.
2. *Инвариантность*. Векторное уравнение не зависит от системы координат и без труда переводится в координатную запись в любой удобной системе координат.
3. *Наглядность*. Дифференциальные операторы векторного анализа и связывающие их соотношения обычно имеют простое и наглядное физическое истолкование.

Наиболее часто применяемые векторные операторы:

1. **ротор** и **дивергенция** — для векторных полей.
2. **градиент** и **лапласиан** — для скалярных полей.

3.1.1 Оператор набла

Оператор набла (оператор Гамильтона) — векторный дифференциальный оператор, обозначаемый символом $\vec{\nabla}$. Для трёхмерного евклидова пространства в прямоугольных декартовых координатах оператор набла определяется следующим образом:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные орты для осей x, y, z, соответственно.

Через оператор набла естественным способом выражаются основные операции векторного анализа: grad (*градиент*), div (*дивергенция*), rot (*ротор*), а также оператор Лапласа.

Этот вектор приобретает смысл в сочетании со скалярной или векторной функцией, к которой он применяется.

Если умножить вектор $\vec{\nabla}$ на скаляр φ, то получится вектор

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k},$$

который представляет собой *градиент* функции φ.

Если вектор $\vec{\nabla}$ скалярно умножить на вектор $\vec{a}$, получится скаляр

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{a} \equiv (\vec{\nabla},\vec{a}) = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

то есть *дивергенция* вектора $\vec{a}$.

Если $\vec{\nabla}$ умножить на $\vec{a}$ векторно, то получится *ротор* вектора:

$$\vec{\nabla}\times\vec{a} \equiv [\vec{\nabla},\vec{a}] = (\partial_y a_z - \partial_z a_y)\vec{i} + (\partial_z a_x - \partial_x a_z)\vec{j} + (\partial_x a_y - \partial_y a_x)\vec{k}.$$

Соответственно, скалярное произведение $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2$ есть скалярный оператор, называемый *оператором Лапласа*. Последний обозначается также $\triangle$. В декартовых координатах оператор Лапласа определяется следующим образом:

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Поскольку оператор набла является дифференциальным оператором, то при преобразовании выражений необходимо учитывать как правила векторной алгебры, так и правила дифференцирования. Например:

$$grad\ (\psi\phi) = \vec{\nabla}(\psi\phi) = \psi\vec{\nabla}\phi + \phi\vec{\nabla}\psi,$$

то есть производная выражения, зависящего от двух полей, есть сумма выражений, в каждом из которых дифференцированию подвергается только одно поле.

3.1.2 Дивергенция

Дивергенция — дифференциальный оператор, отображающий векторное поле на скалярное (то есть операция дифференцирования, в результате применения которой к векторному полю получается скалярное поле), который определяет (для каждой точки), «насколько расходится входящее и исходящее из малой окрестности данной точки поле» (точнее — насколько расходятся входящий и исходящий поток).

Можно дать короткое определение дивергенции — это дифференциальный оператор на векторном поле, характеризующий поток данного поля через поверхность малой окрестности каждой внутренней точки области определения поля. Оператор дивергенции, применённый к полю $\vec{F}$, обозначают как $\operatorname{div}\ \vec{F}$ или $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$.

Определение дивергенции выглядит так:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \lim_{V\to 0}\frac{\Phi_F}{V},$$

где Φ_F — поток векторного поля $\vec{F}$ через сферическую поверхность площадью S, ограничивающую объём V. Ещё более общим, а потому удобным в применении, является определение, когда форма области с поверхностью S и объёмом V допускается любой. Единственным требованием является её нахождение внутри сферы радиусом, стремящимся к нулю.

Допустим, что векторное поле дифференцируемо в некоторой области. Тогда в трёхмерном декартовом пространстве дивергенция будет определяться выражением

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

С точки зрения физики, дивергенция векторного поля является показателем того, в какой степени данная точка пространства является источником или стоком этого поля:

- $\operatorname{div}\vec{F} > 0$ — точка поля является источником;
- $\operatorname{div}\vec{F} < 0$ — точка поля является стоком;
- $\operatorname{div}\vec{F} = 0$ — стоков и источников нет, либо они компенсируют друг друга.

Например, если в качестве векторного поля взять совокупность направлений наискорейшего спуска на земной поверхности, то дивергенция покажет местоположение вершин и впадин, причём на вершинах дивергенция будет положительна (направления спуска расходятся от вершин), а на впадинах отрицательная (ко впадинам направления спуска сходятся).

Следующие свойства могут быть получены из обычных правил дифференцирования.

1. Линейность: для любых векторных полей $\vec{F}$ и $\vec{G}$ и для всех действительных чисел a и b

$$\operatorname{div}(a\vec{F} + b\vec{G}) = a\operatorname{div}\vec{F} + b\operatorname{div}\vec{G}.$$

2. Если φ — скалярное поле, а $\vec{F}$ — векторное, тогда $\operatorname{div}(\varphi\vec{F}) = \operatorname{grad}\varphi\cdot\vec{F} + \varphi\operatorname{div}\vec{F}$.
3. Свойство, связывающее векторные поля $\vec{F}$ и $\vec{G}$, заданные в трёхмерном пространстве, с *ротором*: $\operatorname{div}(\vec{F}\times\vec{G}) = \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{G} - \vec{F}\cdot\operatorname{rot}\vec{G}$.
4. Дивергенция от градиента есть лапласиан:

$$\operatorname{div}(grad\ \psi) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\psi) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\psi = \vec{\nabla}^2\psi = \triangle\psi.$$

5. Дивергенция от ротора: $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = 0$.

3.1.3 Ротор

Ротор, или **вихрь** — векторный дифференциальный оператор над векторным полем. Показывает, насколько и в каком направлении закручено поле в каждой точке. Ротор поля $\vec{F}$ обозначается символом $\operatorname{rot}\vec{F}$ (в русскоязычной литературе) или $\operatorname{curl}\vec{F}$ (в англоязычной литературе), а также $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ через оператор набла.

Ротор векторного поля — вектор, проекция которого на каждое направление равна пределу отношения циркуляции векторного поля по контуру L плоской площадки $\triangle S$, перпендикулярной к этому направлению, к величине этой площадки, когда размеры площадки стремятся к нулю, а сама площадка стягивается в точку:

$$\operatorname*{rot}_{\vec{n}}\vec{a} = \lim_{\triangle S\to 0}\frac{\displaystyle\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{r}}{\triangle S}.$$

Нормаль $\vec{n}$ к площадке направлена так, чтобы при вычислении циркуляции обход по контуру L совершался против часовой стрелки.

В трёхмерной декартовой системе координат $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ вычисляется следующим образом:

$$\operatorname{rot}(F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Для удобства запоминания можно условно представлять ротор как векторное произведение:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times\vec{F} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

Векторное поле, ротор которого равен нулю в любой точке, называется потенциальным (безвихревым).

Следующие свойства могут быть получены из обычных правил дифференцирования.

1. Линейность: для любых векторных полей $\vec{F}$ и $\vec{G}$ и для всех действительных чисел a и b

$$\operatorname{rot}(a\vec{F}+b\vec{G}) = a\operatorname{rot}\vec{F}+b\operatorname{rot}\vec{G}.$$

2. Если φ — скалярное поле, а $\vec{F}$ — векторное, то $\operatorname{rot}(\varphi\vec{F}) = \operatorname{grad}\varphi\times\vec{F}+\varphi\operatorname{rot}\vec{F}$.
3. Дивергенция ротора равна нулю $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \vec{\nabla}\cdot(\nabla\vec{\times}\vec{F}) = 0$. При этом верно и обратное: если поле $\vec{F}$ бездивергентно ($\operatorname{div}\vec{F} = 0$), оно есть поле вихря некоторого поля $\vec{G}$ (векторный потенциал) $\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{G}$.
4. Если поле $\vec{F}$ потенциально ($\vec{F} = \operatorname{grad}\varphi$), его ротор равен нулю (поле $\vec{F}$ — безвихревое) ($\operatorname{rot}\vec{F} = 0$). Верно и обратное: если поле безвихревое ($\operatorname{rot}\vec{F} = 0$), то оно потенциально ($\vec{F} = \operatorname{grad}\varphi$) для некоторого скалярного поля φ.

5. ***Теорема Стокса***: циркуляция вектора по замкнутому контуру, являющемуся границей некоторой поверхности, равна потоку ротора этого вектора через эту поверхность

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

3.1.4 Градиент

Градиент — характеристика, показывающая направление наискорейшего возрастания некоторой величины, значение которой меняется от одной точки пространства к другой. В математике, градиент функции f это вектор, который указывает направление наискорейшего роста этой функции, и чей модуль равен скорости ее изменения в этом направлении.

Для случая трёхмерного пространства, градиентом называется векторная функция с компонентами $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$, где φ — некоторая скалярная функция координат x, t, z.

Градиент обозначается $\operatorname{grad}\varphi$ или, с использованием оператора набла, $\vec{\nabla}\varphi$. Из определения градиента следует, что:

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z$$

Смысл градиента любой скалярной функции f в том, что его скалярное произведение с бесконечно малым вектором перемещения $d\vec{x}$ дает **полный дифференциал** этой функции при соответствующем изменении координат в пространстве, на котором определена f, то есть линейную (в случае общего положения она же главная) часть изменения f при смещении на $d\vec{x}$. Применяя одну и ту же букву для обозначения функции от вектора и соответствующей функции от его координат, можно написать:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i = (\operatorname{grad} f \cdot d\vec{x})$$

В различных отраслях физики используется понятие градиента различных физических полей. Например, *градиент концентрации* — нарастание или уменьшение по какому-либо направлению концентрации растворённого вещества, *градиент температуры* — увеличение или уменьшение по направлению температуры среды и т. д. Градиент может быть вызван различными причинами, например, механическим препятствием, действием электромагнитных, гравитационных или других полей или различием в растворяющей способности граничащих фаз.

3.1.5 Оператор Лапласа

Оператор Лапласа (лапласиан) — дифференциальный оператор, действующий в линейном пространстве гладких функций и обозначаемый символом $\triangle$. Функции F он ставит в соответствие функцию $\sum\limits_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}F$.

Оператор Лапласа эквивалентен последовательному взятию операций градиента и дивергенции: $\triangle = \operatorname{div}\operatorname{grad}$, таким образом значение оператора Лапласа в точке может быть истолковано как плотность источников (стоков) потенциального векторного поля $\operatorname{grad} F$ в этой точке. В декартовой системе координат оператор Лапласа часто обозначается следующим образом $\triangle = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2$, то есть в виде скалярного произведения оператора набла на себя.

С помощью данного оператора удобно записывать уравнения Лапласа, Пуассона и волновое уравнение. В физике оператор Лапласа применим в электростатике и электродинамике, во многих уравнениях физики сплошных сред, а также при изучении равновесия мембран, плёнок или поверхностей раздела фаз с поверхностным натяжением, в стационарных задач диффузии и теплопроводности, которые сводятся к обычным уравнениям Лапласа или Пуассона или к некоторым их обобщениям.